7.4.7 Polohové úlohy v prostoru II

Př. 1: Urči vzájemnou polohu rovin $\rho: 2x-4y+2z-4=0$ a $\sigma: 3x-6y+3z-9=0$.

$\rho: 2x-4y+2z-4=0$ $\qquad$ $\sigma: 3x-6y+3z-9=0$

$\rho: x-2y+z-2=0$ $\qquad$ $\sigma: x-2y+z-3=0$

Rovnice obou rovin se liší v koeficientu d $\Rightarrow$ roviny jsou rovnoběžné.

Př. 2: Urči zbývající koeficienty v rovnicích rovin ρ a σ, tak aby byly totožné. $\rho: 2x+by+3z-2=0$, $\sigma: ax+5y-2z+d=0$.

$a_\rho x = k\cdot a_\sigma x$ $\qquad$ $b_\rho y = k\cdot b_\sigma y$ $\qquad$ $c_\rho z = k\cdot c_\sigma z$ $\qquad$ $d_\rho = k\cdot d_\sigma$

$2 = k\cdot a_\sigma$ $\qquad$ $b_\rho = k\cdot 5$ $\qquad$ $3 = k\cdot(-2)\ \ k=-\frac{3}{2}$ $\qquad$ $-2 = k\cdot d_\sigma$

$a_\sigma = \frac{2}{k} = -\frac{4}{3}$ $\qquad$ $b_\rho = k\cdot 5 = -\frac{3}{2}\cdot 5 = -\frac{15}{2}$ $\qquad$ $d_\sigma = \frac{-2}{k} = \frac{4}{3}$

Rovnice rovin: $\rho: 2x-\frac{15}{2}y+3z-2=0$ $\qquad$ $\sigma: -\frac{4}{3}x+5y-2z+\frac{4}{3}=0$.

Př. 3: Urči vzájemnou polohu rovin $\rho: 2x-4y+2z-4=0$ a $\sigma: 2x-3y+3z-3=0$. Pokud jsou roviny různoběžné najdi jejich průsečnici.

Vypíšeme si normálové vektory: $\boldsymbol{n}_\rho=(2;-4;2)$ $\boldsymbol{n}_\sigma=(2;-3;3)$ $\Rightarrow$ nejsou rovnoběžné

$$\begin{array}{lr} & 2x-4y+2z-4=0 \\ & 2x-3y+3z-3=0 \\ \hline & 2x-4y+2z-4=0 \\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & -y-z-1=0 \\ \hline \end{array}$$

z druhé rovnice: $y=1+z$, z první rovnice: $2x-4(1+z)+2z-4=0$, $x=4+z$

$K=\{[4+z;1+z;z],z\in R\}$ $\Rightarrow$ $z=t$ $\Rightarrow$ $K=\{[4+t;1+t;t],t\in R\}$.

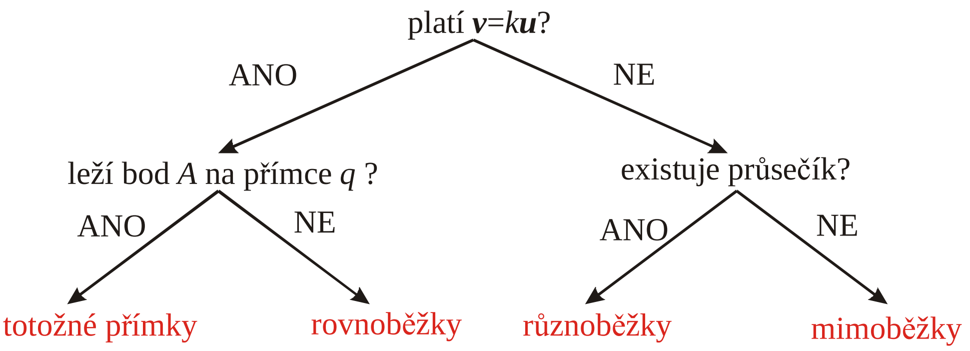
Př. 4: Najdi společné body rovin $\rho: \{[1+t-s;2-t+2s;-1+s],t,s\in R\}$ a $\sigma: x+y-z-4=0$. Na základě výsledku rozhodni o vzájemné poloze rovin ρ a σ.

Dosadíme z prvních tří rovnic do čtvrté: $(1+t-s)+(2-t+2s)-(-1+s)-4=0$

$1+t-s+2-t+2s+1-s-4=0$ $\qquad$ $0=0$

Řešením je libovolná dvojice čísel t, s $\Rightarrow$ roviny jsou totožné.

Př. 5: Zopakuj postup, kterým rozhodneš o vzájemné poloze dvou parametricky zadaných přímek $p(A;\boldsymbol{u})$ a $q(B;\boldsymbol{v})$ v prostoru.



Př. 6: Je dána přímka $p(P;\boldsymbol{u}_p)$, $P[1;2;-1]$, $\boldsymbol{u}_p=(2;-1;1)$. Urči postupně vzájemnou polohu přímky p a přímek:

a) $a:\{[2-4t;3+2t;3-2t],t\in R\}$

b) $b(B;\boldsymbol{u}_b)$, $B[-1;2;1]$, $\boldsymbol{u}_b=(1;1;-2)$

c) c: $\begin{aligned} x&=-1-2t\\ y&=3+t\\ z&=-2-t,t\in R\end{aligned}$

d) $d:\{[-1+2t;-1+t;-2+t],t\in R\}$

a) $a:\{[2-4t;3+2t;3-2t],t\in R\}$

$\boldsymbol{u}_p=(2;-1;1)$ $\quad\boldsymbol{u}_a=(-4;2;-2)$. Platí: $\boldsymbol{u}_a=-2\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné.

$P[1;2;-1]$ na a: $\begin{aligned} 1&=2-4t\Rightarrow t=\frac{1}{4}\\ 2&=3+2t\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\\ -1&=3-2t\Rightarrow t=2\end{aligned}$ $\Rightarrow$ neleží $\Rightarrow$ **přímky *p* a *a* jsou rovnoběžné**.

b) $b(B;\boldsymbol{u}_b)$, $B[-1;2;1]$, $\boldsymbol{u}_b=(1;1;-2)$

$\boldsymbol{u}_p=(2;-1;1)$ $\quad\boldsymbol{u}_b=(1;1;-2)$. $\boldsymbol{u}_b\neq k\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné.

$$\begin{aligned} 1+2t&=-1+s\\ 2-t&=2+s\\ -1+t&=1-2s\end{aligned}\qquad \begin{aligned} 2t-s&=-2\\ -t-s&=0\Rightarrow s=-t\\ t+2s&=2\end{aligned}\qquad \begin{aligned} 2t-(-t)&=-2\Rightarrow t=-\frac{2}{3}\\ t+2(-t)&=-2\Rightarrow t=2\end{aligned}\Rightarrow \text{soustava}$$

nemá řešení $\Rightarrow$ neexistuje průsečík přímek p a b $\Rightarrow$ **přímky *p* a *b* jsou mimoběžné**.

c) c: $\begin{aligned} x&=-1-2t\\ y&=3+t\\ z&=-2-t,t\in R\end{aligned}$

$\boldsymbol{u}_p=(2;-1;1)$ $\quad\boldsymbol{u}_c=(-2;1;-1)$. $\boldsymbol{u}_c=-1\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné nebo totožné.

$P[1;2;-1]$ na c: $\begin{aligned} 1&=-1-2t\Rightarrow t=-1\\ 2&=3+t\Rightarrow t=-1\\ -1&=-2-t\Rightarrow t=-1\end{aligned}$ $\Rightarrow$ **přímky *p* a *c* jsou totožné**.

d) $d:\{[-1+2t;-1+t;-2+t],t\in R\}$

$\boldsymbol{u}_p=(2;-1;1)$ $\quad\boldsymbol{u}_d=(2;1;1)$. $\boldsymbol{u}_d\neq k\cdot\boldsymbol{u}_p$ $\Rightarrow$ přímky jsou různoběžné nebo mimoběžné.

$$\begin{aligned} 1+2t&=-1+2s\\ 2-t&=-1+s\\ -1+t&=-2+s\end{aligned}\qquad \begin{aligned} 2t-2s&=-2\\ -t-s&=-3\\ t-s&=-1\Rightarrow t=s-1\end{aligned}\qquad \begin{aligned} 2(s-1)-2s&=-2\\ -(s-1)-s&=-3\end{aligned}\qquad \begin{aligned} 0&=0\\ -2s&=-4\Rightarrow s=2\end{aligned}$$

Dopočítáme souřadnice průsečíku: $\begin{aligned} x&=1+2t=1+2\cdot1=3\\ y&=2-t=2-1=1\\ z&=-1+t=-1+1=0\end{aligned}$ $\Rightarrow$ průsečík $Q[3;1;0]$.

Přímky *p* a *d* jsou mimoběžné.